



**Concursul Fractal, Secțiunea  
Juniori  
I-a Ediție din 10.11.2024**

---

**Problema 1.** Arătați că orice progresie aritmetică la care primul termen și rația sunt numere naturale nenule conține o infinitate de termeni compuși.

\*Un număr este compus dacă acesta nu este prim.

**Problema 2.** Un dreptunghi  $m \times n$ , unde  $m$  și  $n$  sunt numere naturale strict mai mari decât 1, este partiționat în  $mn$  pătrățele cu latura 1, fiecare dintre care poate fi colorat sau alb sau negru. O operație constă din schimbarea culorii tuturor pătrățelelor de pe un rând sau de pe o coloană în culoarea opusă. Este oare posibil ca, deși inițial exact un pătrățel e colorat negru, iar toate celelalte alb, după un număr finit de mutări toate pătrățelele au aceeași culoare?

**Problema 3.** Fie  $a, b, c$  trei numere reale pozitive care satisfac  $ab + bc + ca = 1$ , arătați că:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{4abc}$$

**Problema 4.** În triunghiul  $ABC$ ,  $D$ ,  $E$  și  $F$  sunt picioarele perpendicularelor duse din vârfurile  $A$ ,  $B$  și  $C$ , respectiv. Paralela dusă la  $EF$  prin  $D$  intersectează  $AB$  în  $P_B$  și  $AC$  în  $P_C$ . Fie  $X$  intersecția dintre  $EF$  și  $BC$ . Arătați că cercul circumscris triunghiului  $P_B P_C X$  trece prin mijlocul laturii  $BC$ .

*Concursul durează 4 ore (240 de minute)  
Fiecare problemă valorează câte 7 puncte*